广义 Rodrigues 参数姿态描述方法*

方　群　陈记争**　马卫华
西北工业大学航天学院，西安 710072

摘要　提出了一种解决经典 Rodrigues 参数奇异性的方法．首先建立包括经典 Rodrigues 参数在内的四套姿态描述参数，然后对它们之间的关系、性质进行了探讨，建立了它们与其他姿态描述参数的转换关系，通过这四套参数相互切换解决了 Rodrigues 参数的奇异性问题，最后给出这种方法在捷联姿态解算中的应用，仿真结果表明利用该方法与四元数算法或利用修正 Rodrigues 参数构造的算法相比在不损失计算精度的条件下计算效率大约提高一倍．

关键词　姿态描述　Rodrigues 参数　四元数　奇异性

航空航天技术的发展对姿态确定算法的精度和实时性提出了更高的要求．目前常用的姿态描述方法有 Euler 角、方向余弦矩阵和四元数等[1,2]，然而它们均表现出一定的局限性[1,3,4]．Euler 角方法因涉及大量三角运算而实时性不高；方向余弦矩阵方法因存在6个约束条件而难以提高工作效率；四元数方法是一种综合性能较高的方法，但它仍然存在一个约束条件，这种非最小实现的缺陷在一定程度上影响了它的应用效果[4]．近年来，一些学者注意到了 Rodrigues 参数在姿态控制方面的价值[3,5]．Rodrigues 参数和修正 Rodrigues 参数的定义都是基于刚体定点转动的 Euler 定理，设 $\boldsymbol{e}$ 为有限转动轴上的单位矢量，θ 为绕 $\boldsymbol{e}$ 的旋转角，Rodrigues 参数定义为[1,3]

$$\boldsymbol{\Phi} = \tan(\theta/2)\boldsymbol{e} \tag{1}$$

修正 Rodrigues 参数定义为[1]

$$\boldsymbol{\sigma} = \tan(\theta/4)\boldsymbol{e} \tag{2}$$

对于 Rodrigues 参数，设 $\boldsymbol{\Phi}$ 的模为 ϕ，当 $\theta\rightarrow\pm180°$ 时，$\phi\rightarrow\infty$，此时无法进行姿态解算；对于修正 Rodrigues 参数，设 $\boldsymbol{\sigma}$ 的模为 σ，当 $\theta\rightarrow\pm360°$ 时，$\sigma\rightarrow\infty$，此时无法进行姿态解算，这就是所谓的奇异性问题，也是限制它们广泛应用的一个关键问题．

所有三参数姿态描述参数都存在奇异性[1,6]．基于协调同步变换解决三参数姿态描述参数奇异性的方法就是建立与它对等的多套参数，这几套参数(包括原参数)不会同时发生奇异现象，当一套参数接近奇异时，可以用另一套远离奇异的参数接替计算，从而避免奇异现象的发生．Signla 等基于协调同步变换解决了 Euler 角的奇异性问题[7]．Schaub 等基于协调同步变换解决了修正 Rodrigues 参数的奇异性问题[8]，他们利用修正 Rodrigues 参数和其影子参数(shadow parameters)

$$\boldsymbol{\sigma}^{s} = -\boldsymbol{\sigma}/\sigma^{2} \tag{3}$$

相互切换避免修正 Rodrigues 参数奇异现象的发生．由(3)式知 $\boldsymbol{\sigma}$ 的模 σ 和 $\boldsymbol{\sigma}^{s}$ 的模 σ^{s} 互为倒数，$\sigma\rightarrow\infty$ 时，$\sigma^{s}\rightarrow0$；$\sigma^{s}\rightarrow\infty$ 时，$\sigma\rightarrow0$，两者不会同时出现奇异现象．若切换原则为：当 $\sigma>1$ 时，用 $\boldsymbol{\sigma}^{s}$

2006-06-12 收稿，2006-10-13 收修改稿
* 国家自然科学基金资助项目(批准号：10572114)
** 通信作者，E-mail：jzchen804@163.com

进行姿态解算；当 $\sigma^s>1$ 时，用 $\boldsymbol{\sigma}$ 进行姿态解算，则可始终利用 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^s$ 中模不大于1的那个参数进行姿态解算，从而避免了修正 Rodrigues 参数的奇异性. 文献[9]和[10]分别给出了这种方法在姿态确定和控制中的应用. 由于经典 Rodrigues 参数不存在影子参数[8]，所以这种方法不能直接推广到 Rodrigues 参数.

本文基于协调同步变换提出了解决 Rodrigues 参数奇异性的方法. 首先利用 Schaub 等提出的立体投影(stereographic projection)方法[8]，建立包括经典 Rodrigues 参数在内的四套姿态描述参数，分析表明它们不会同时发生奇异现象，通过这四套参数相互切换可以避免奇异现象的发生，即当一套参数接近奇异时，从这四套参数中调取另一套远离奇异的参数接替计算，从而避免奇异现象的发生.

1 建立 Rodrigues 参数族

四元数是基于 Euler 定理定义的，其定义为[1,8]

$$\beta_0=\cos(\theta/2),\quad \beta_i=e_i\sin(\theta/2),\quad i=1,2,3 \tag{4}$$

满足约束条件

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\beta_0^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1 \tag{5}$$

这个等式定义了一个四维的单位球，这个球上的一个点对应一个姿态. 下面利用 Schaub 和 Junkins 提出的立体投影方法[8]，建立包括经典 Rodrigues 参数在内的四套姿态描述参数. 将四元数表示的四维单位球投影到三维平面上，首先在四维空间中选择投影点和投影平面，然后通过投影点和四元数的单位球上的任一点作一条直线，这条直线和投影平面相交于一点，这个点和单位球上的点是对应的，它在三维平面内的坐标是三维的，这个三维的坐标就是我们要求的姿态描述参数. 选择不同的投影点和投影平面可以得到不同的姿态描述参数.

选择投影点为原点，投影平面为 $\beta_0=1$，按照立体投影方法得经典 Rodrigues 参数 $\boldsymbol{\Phi}$ 为[8]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}&=[\phi_1\quad \phi_2\quad \phi_3]^{\mathrm{T}}\\&=[\beta_1/\beta_0\quad \beta_2/\beta_0\quad \beta_3/\beta_0]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{6}$$

它与(1)式是等价的.

同理，选择投影点为原点，投影平面为 $\beta_1=1$，得参数 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}&=[\phi_1^{\mathrm{I}}\quad \phi_2^{\mathrm{I}}\quad \phi_3^{\mathrm{I}}]^{\mathrm{T}}\\&=[\beta_0/\beta_1\quad \beta_3/\beta_1\quad \beta_2/\beta_1]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{7}$$

选择投影点为原点，投影平面为 $\beta_2=1$，得参数 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}&=[\phi_1^{\mathrm{II}}\quad \phi_2^{\mathrm{II}}\quad \phi_3^{\mathrm{II}}]^{\mathrm{T}}\\&=[\beta_3/\beta_2\quad \beta_0/\beta_2\quad \beta_1/\beta_2]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{8}$$

选择投影点为原点，投影平面为 $\beta_3=1$，得参数 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{III}}$ 为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{III}}&=[\phi_1^{\mathrm{III}}\quad \phi_2^{\mathrm{III}}\quad \phi_3^{\mathrm{III}}]^{\mathrm{T}}\\&=[\beta_2/\beta_3\quad \beta_1/\beta_3\quad \beta_0/\beta_3]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{9}$$

我们称 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}$，$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}$，$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{III}}$ 为广义 Rodrigues 参数，简称为 Rodrigues 参数，它们与经典 Rodrigues 参数 $\boldsymbol{\Phi}$ 的关系为

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}=[1/\phi_1\quad \phi_3/\phi_1\quad \phi_2/\phi_1]^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}=[\phi_3/\phi_2\quad 1/\phi_2\quad \phi_1/\phi_2]^{\mathrm{T}} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{III}}=[\phi_2/\phi_3\quad \phi_1/\phi_3\quad 1/\phi_3]^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

当 $\boldsymbol{\Phi}$ 的模 ϕ 趋于无穷大时，$\boldsymbol{\Phi}$ 的按模最大分量也趋于无穷大. 从(10)—(12)式可以看出，若 $\boldsymbol{\Phi}$ 按模最大的分量为 ϕ_1，则此时 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}$ 不奇异；若 $\boldsymbol{\Phi}$ 按模最大的分量为 ϕ_2，则此时 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}$ 不奇异；若 $\boldsymbol{\Phi}$ 按模最大的分量为 ϕ_3，则此时 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{III}}$ 不奇异. 因此 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}$，$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}$，$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{III}}$ 和 $\boldsymbol{\Phi}$ 不会同时出现奇异现象，通过它们四个相互切换可以避免奇异现象的发生.

2 Rodrigues 参数族的性质

从 $\boldsymbol{\Phi}$ 向 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}$，$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}$，$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{III}}$ 的切换在数学上可视为一种数学变换. 对任一向量 $\boldsymbol{V}=[V_1\quad V_2\quad V_3]^{\mathrm{T}}$，定义如下3个变换

$$\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{V})=[1/V_1\quad V_3/V_1\quad V_2/V_1]^{\mathrm{T}} \tag{13a}$$

$$T_2(V) = [V_3/V_2 \quad 1/V_2 \quad V_1/V_2]^{\mathrm{T}} \quad (13b)$$

$$T_3(V) = [V_2/V_3 \quad V_1/V_3 \quad 1/V_3]^{\mathrm{T}} \quad (13c)$$

则 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}=\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{\Phi})$，$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}=\boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{\Phi})$，$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{III}}=\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{\Phi})$. 另外记 $\boldsymbol{T}_0$ 为恒等变换，即 $\boldsymbol{V}=\boldsymbol{T}_0(\boldsymbol{V})$. 为了下面叙述的方便，我们给 $\boldsymbol{\Phi}$ 另一个记号 $\boldsymbol{\Phi}^0$，上标 0 是一个记号. 容易验证集合 $\boldsymbol{E}=\{\boldsymbol{\Phi}^0, \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}, \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{III}}\}$ 关于 $\boldsymbol{T}_1$，$\boldsymbol{T}_2$，$\boldsymbol{T}_3$ 这 3 个运算是封闭的，即集合 $\boldsymbol{E}$ 中的任一元素经变换 $\boldsymbol{T}_i(i=1, 2, 3)$后所得的值仍是集合 $\boldsymbol{E}$ 的元素. 这也是能够利用 $\{\boldsymbol{\Phi}^0, \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}, \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{III}}\}$ 相互切换避免奇异性的必要条件.

可以验证变换 $\boldsymbol{T}_0$，$\boldsymbol{T}_1$，$\boldsymbol{T}_2$，$\boldsymbol{T}_3$ 满足如下性质：

(1) $\boldsymbol{T}_i\boldsymbol{T}_j=\boldsymbol{T}_j\boldsymbol{T}_i \quad (i, j=0, 1, 2, 3)$ (14)

(2) $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2=\boldsymbol{T}_3, \quad \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_3=\boldsymbol{T}_2, \boldsymbol{T}_2\boldsymbol{T}_3=\boldsymbol{T}_1$ (15)

(3) $\boldsymbol{T}_i\boldsymbol{T}_i=\boldsymbol{T}_0 \quad (i=0, 1, 2, 3)$ (16)

设当前时刻刚体的姿态用 $\boldsymbol{\Phi}^k(k=0, \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$表示，若 $\boldsymbol{\Phi}^k$ 的第 $i(i=1, 2, 3)$个分量的模最大并且大于 1，则对 $\boldsymbol{\Phi}^k$ 进行 $\boldsymbol{T}_i$ 变换，由(13)式知变换后的参数 $\boldsymbol{T}_i(\boldsymbol{\Phi}^k)$的按模最大分量的模小于 1. 由于集合 $\boldsymbol{E}$ 关于 $\boldsymbol{T}_1$，$\boldsymbol{T}_2$，$\boldsymbol{T}_3$ 这 3 个运算是封闭的，所以 $\boldsymbol{T}_i(\boldsymbol{\Phi}^k)$是集合 $\boldsymbol{E}$ 中的元素，记为 $\boldsymbol{\Phi}^n$. 由于 $\boldsymbol{\Phi}^n$ 远离奇异点，这样就可以保证始终利用 $\{\boldsymbol{\Phi}^0, \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}, \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{III}}\}$ 中远离奇异的参数描述刚体的姿态. 要确定 $\boldsymbol{\Phi}^n$ 是集合 $\boldsymbol{E}$ 中的哪一个元素，只需确定 n. 由于

$$\boldsymbol{T}_i(\boldsymbol{\Phi}^k) = \boldsymbol{T}_i\boldsymbol{T}_k(\boldsymbol{\Phi}^0)$$

所以

$$\boldsymbol{\Phi}^n = \boldsymbol{T}_i\boldsymbol{T}_k(\boldsymbol{\Phi}^0)$$

即

$$\boldsymbol{T}_n(\boldsymbol{\Phi}^0) = \boldsymbol{T}_i\boldsymbol{T}_k(\boldsymbol{\Phi}^0)$$

也就是

$$\boldsymbol{T}_n = \boldsymbol{T}_i\boldsymbol{T}_k.$$

有了上式，结合(14)—(16)式便可以确定 n. 若 $k=0$，则 $n=i$；若 $i=k$，由(16)式得 $n=0$；若 $i\neq k$ 且 $k\neq 0$，由(14)和(15)式得 $n=6-i-k$，即

$$n = \begin{cases} i & ，\text{当 } k=0 \text{ 时} \\ 0 & ，\text{当 } i=k \text{ 时} \\ 6-i-k & ，\text{当 } i\neq k \text{ 且 } k\neq 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (17)$$

设刚体的姿态用 $\boldsymbol{\Phi}^k$ 表示，$\boldsymbol{\Phi}^k$ 按模最大的分量为 $\phi_i^k(i=1, 2, 3)$. 关于如何在 Rodrigues 参数族 $\{\boldsymbol{\Phi}^0, \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}, \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{III}}\}$ 中进行切换可总结如下：

切换条件：ϕ_i^k 的模大于 1.

切换操作：对 $\boldsymbol{\Phi}^k$ 进行 $\boldsymbol{T}_i$ 变换.

切换后 Rodrigues 参数的类型：由(17)式确定.

3 Rodrigues 参数乘法的推广

设 $\boldsymbol{\Phi}_1$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_2$ 是两个经典 Rodrigues 参数，Rodrigues参数的乘法定义为[1,3]

$$\boldsymbol{\Phi}_1 * \boldsymbol{\Phi}_2 = \frac{\boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_2 + \boldsymbol{\Phi}_1 \times \boldsymbol{\Phi}_2}{1-(\boldsymbol{\Phi}_1 \cdot \boldsymbol{\Phi}_2)} \quad (18)$$

在利用速率陀螺的输出进行姿态解算的情况下，Rodrigues 参数的乘法对构造递推的定姿算法有重要意义. 我们希望将此乘法推广到广义 Rodrigues 参数与经典 Rodrigues 参数的乘法“⊗”，并且具有如下的性质：若刚体在 t_1 时刻的姿态用广义 Rodrigues 参数表示为 $\boldsymbol{\Phi}^k(t_1)(k=\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$，在 $[t_1, t_2]$时间内刚体的转动用经典 Rodrigues 参数表示为 $\Delta\boldsymbol{\Phi}$，则刚体在 t_2 时刻的姿态用广义 Rodrigues 参数表示为 $\boldsymbol{\Phi}^k(t_2)=\boldsymbol{\Phi}^k(t_1)\otimes\Delta\boldsymbol{\Phi}$. 即对于经典 Rodrigues 参数 $\boldsymbol{\Phi}_1$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_2$，有

$$\boldsymbol{T}_i(\boldsymbol{\Phi}_1 * \boldsymbol{\Phi}_2) = \boldsymbol{T}_i(\boldsymbol{\Phi}_1) \otimes \boldsymbol{\Phi}_2, \; i = 1,2,3 \quad (19)$$

解决这一问题有两个思路，一是自定义广义 Rodrigues参数与经典 Rodrigues 参数的乘法，二是广义 Rodrigues 参数与经典 Rodrigues 参数的乘法“⊗”采用经典 Rodrigues 参数乘法“ * ”的运算规则，对(7)—(9)式定义的广义 Rodrigues 参数进行修正，使之满足希望的性质. 在这里采用第二种方法，将广义 Rodrigues 参数 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}$，$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}$和 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{III}}$修正为

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}} = [-\beta_0/\beta_1 \quad \beta_3/\beta_1 \quad -\beta_2/\beta_1]^{\mathrm{T}} \quad (20)$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}} = [-\beta_3/\beta_2 \quad -\beta_0/\beta_2 \quad \beta_1/\beta_2]^{\mathrm{T}} \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{III}}=[\beta_2/\beta_3 \quad -\beta_1/\beta_3 \quad -\beta_0/\beta_3]^{\mathrm{T}} \tag{22}$$

广义 Rodrigues 参数与经典 Rodrigues 参数 $\boldsymbol{\Phi}$ 的关系变为

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}=[-1/\phi_1 \quad \phi_3/\phi_1 \quad -\phi_2/\phi_1]^{\mathrm{T}} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}=[-\phi_3/\phi_2 \quad -1/\phi_2 \quad \phi_1/\phi_2]^{\mathrm{T}} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{III}}=[\phi_2/\phi_3 \quad -\phi_1/\phi_3 \quad -1/\phi_3]^{\mathrm{T}} \tag{25}$$

将 $\boldsymbol{T}_1$，$\boldsymbol{T}_2$，$\boldsymbol{T}_3$ 3个变换相应地修正为

$$\boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{V})=[-1/V_1 \quad V_3/V_1 \quad -V_2/V_1]^{\mathrm{T}} \tag{26a}$$

$$\boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{V})=[-V_3/V_2 \quad -1/V_2 \quad V_1/V_2]^{\mathrm{T}} \tag{26b}$$

$$\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{V})=[V_2/V_3 \quad -V_1/V_3 \quad -1/V_3]^{\mathrm{T}} \tag{26c}$$

可以验证它们满足第2小节提出的所有性质，并且

$$\boldsymbol{T}_i(\boldsymbol{\Phi}_1 * \boldsymbol{\Phi}_2)=\boldsymbol{T}_i(\boldsymbol{\Phi}_1) * \boldsymbol{\Phi}_2, \quad i=0,1,2,3 \tag{27}$$

根据(27)式，容易得到下面的定理

定理1 设惯性参考系为 $oxyz$，在 t 时刻和 $t+h$ 时刻刚体相对于惯性参考系 $oxyz$ 的姿态用广义 Rodrigues 参数分别表示为 $\boldsymbol{\Phi}^k(t)$ 和 $\boldsymbol{\Phi}^k(t+h)$ (k=0，I，II，III)，则

$$\boldsymbol{\Phi}^k(t+h)=\boldsymbol{\Phi}^k(t) * \left(\frac{\tan(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta}\Delta\boldsymbol{\theta}\right) \tag{28a}$$

其中 $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 为角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的积分，即

$$\Delta\boldsymbol{\theta}=\int_t^{t+h}\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}t \tag{28b}$$

当角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 的方向在空间变化时，上式是不成立的，即角改变量不是矢量，此时可用等效转动矢量 $\boldsymbol{\varphi}$ 代替[11]．设在$[t, t+h]$期间，对陀螺等间隔 $h/2$ 采样两次得 $\boldsymbol{\theta}_1$ 和 $\boldsymbol{\theta}_2$，则计算等效转动矢量 $\boldsymbol{\varphi}$ 的二子样公式为[11]

$$\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\theta}_1+\boldsymbol{\theta}_2+\frac{2}{3}\boldsymbol{\theta}_1\times\boldsymbol{\theta}_2 \tag{29}$$

关于等效转动矢量的其他计算方法可参阅文献[11]—[13].

4 广义 Rodrigues 参数向其他参数的转换

设参考系至本体系的方向余弦矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 Rodrigues 参数 $\boldsymbol{\Phi}^k$(k=0，I，II，III)向方向余弦矩阵的转换公式为

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{1+\phi^{k^2}}\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{bmatrix} \tag{30}$$

其中

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}&=\gamma_1(1+\phi_1^{k^2}-\phi_2^{k^2}-\phi_3^{k^2})\\
\alpha_{12}&=2\gamma_1(\phi_1^k\phi_2^k-\phi_3^k)\\
\alpha_{13}&=2\gamma_1(\phi_1^k\phi_3^k+\phi_2^k)\\
\alpha_{21}&=2\gamma_2(\phi_1^k\phi_2^k+\phi_3^k)\\
\alpha_{22}&=\gamma_2(1-\phi_1^{k^2}+\phi_2^{k^2}-\phi_3^{k^2})\\
\alpha_{23}&=2\gamma_2(\phi_2^k\phi_3^k-\phi_1^k)\\
\alpha_{31}&=2\gamma_3(\phi_1^k\phi_3^k-\phi_2^k)\\
\alpha_{32}&=2\gamma_3(\phi_2^k\phi_3^k+\phi_1^k)\\
\alpha_{33}&=\gamma_3(1-\phi_1^{k^2}-\phi_2^{k^2}+\phi_3^{k^2})
\end{aligned}$$

$$\gamma_1=\begin{cases}1, & \text{当 } k=0 \text{ 或 I 时}\\ -1, & \text{当 } k=\text{II 或 III 时}\end{cases}$$

$$\gamma_2=\begin{cases}1, & \text{当 } k=0 \text{ 或 II 时}\\ -1, & \text{当 } k=\text{I 或 III 时}\end{cases}$$

$$\gamma_3=\begin{cases}1, & \text{当 } k=0 \text{ 或 III 时}\\ -1, & \text{当 } k=\text{I 或 II 时}\end{cases}$$

以方向余弦矩阵为中介很容易得到 Rodrigues 参数至 Euler 角的转换公式．若选择在航空领域常用的2-3-1形式的 Euler 角，即偏航角 ψ、俯仰角 φ 和滚转角 γ，则 $\boldsymbol{\Phi}^k$(k=0，I，II，III)向 Euler 角的转换公式为

$$\begin{cases}\sin\varphi=\dfrac{2\gamma_4(\phi_1^k\phi_2^k-\phi_3^k)}{1+\phi^{k^2}}\\ \tan\psi=-\dfrac{2(\phi_1^k\phi_3^k+\phi_2^k)}{1+\phi_1^{k^2}-\phi_2^{k^2}-\phi_3^{k^2}}\\ \tan\gamma=-\dfrac{2\gamma_4(\phi_2^k\phi_3^k+\phi_1^k)}{1-\phi_1^{k^2}+\phi_2^{k^2}-\phi_3^{k^2}}\end{cases} \tag{31}$$

其中

$$\gamma_k = \begin{cases} 1, & 当 k = 0 或 \mathrm{I} 时 \\ -1, & 当 k = \mathrm{II} 或 \mathrm{III} 时 \end{cases}$$

5 在捷联惯导姿态解算中的应用

对捷联惯导而言，目前最常用的捷联姿态算法为四元数算法[11]. 利用本文提出的基于协调同步变换的 Rodrigues 参数姿态描述方法，可以方便地建立递推形式的捷联姿态算法. 设在第 j 步飞行器的姿态用广义 Rodrigues 参数表示为 $\boldsymbol{\Phi}_j^k(k=0，\mathrm{I}，\mathrm{II}，\mathrm{III})$，从第 $j-1$ 步到第 j 步时间内飞行器姿态运动的等效转动矢量为 $\Delta\boldsymbol{\varphi}_j$. 以定理 1 为基础可得捷联姿态算法

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Phi}_j^k = \boldsymbol{\Phi}_{j-1}^k * \Delta\boldsymbol{\Phi}_j^k = \dfrac{\boldsymbol{\Phi}_{j-1}^k + \Delta\boldsymbol{\Phi}_j^k + \boldsymbol{\Phi}_{j-1}^k \times \Delta\boldsymbol{\Phi}_j^k}{1 - (\boldsymbol{\Phi}_{j-1}^k \cdot \Delta\boldsymbol{\Phi}_j^k)} \\ \Delta\boldsymbol{\Phi}_j^k = \dfrac{\tan(\Delta\varphi_j/2)}{\Delta\varphi_j}\Delta\boldsymbol{\varphi}_j = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\Delta\varphi_j^2}{24} + \cdots\right)\Delta\boldsymbol{\varphi}_j \end{cases} \tag{32}$$

其中 $j=1，2，3，\cdots，k=0，\mathrm{I}，\mathrm{II}，\mathrm{III}$. (32)式进行了 Taylor 展开，究竟展开到几阶可通过仿真分析确定. 在解算的过程中，若 $\boldsymbol{\Phi}_j^k$ 的第 i 个分量的模最大并且大于1，对 $\boldsymbol{\Phi}_j^k$ 进行 $\boldsymbol{T}_i$ 变换，用变换后的参数代替 $\boldsymbol{\Phi}_j^k$ 继续进行计算. 这样，只要给出初始时刻飞行器的姿态 $\boldsymbol{\Phi}_0^{k_0}$，便可以递推出任意时刻飞行器的姿态.

类似地，以修正 Rodrigues 参数的乘法为基础，并考虑其影子参数，可以建立递推形式的捷联姿态算法. 设 $\boldsymbol{\sigma}_1$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_2$ 是两个修正 Rodrigues 参数，它们的模分别为 σ_1 和 σ_2，修正 Rodrigues 参数的乘法定义为[1]

$$\boldsymbol{\sigma}_1 \circ \boldsymbol{\sigma}_2 = \frac{(1-\sigma_2^2)\boldsymbol{\sigma}_1 + (1-\sigma_1^2)\boldsymbol{\sigma}_2 + 2\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2}{1 + \sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2} \tag{33}$$

设在第 j 步飞行器的姿态用修正 Rodrigues 参数表示为 $\boldsymbol{\sigma}_j$，以修正 Rodrigues 参数的乘法为基础可得捷联姿态算法

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma}_j = \dfrac{(1-\Delta\sigma_j^2)\boldsymbol{\sigma}_{j-1} + (1-\sigma_{j-1}^2)\Delta\boldsymbol{\sigma}_j + 2\boldsymbol{\sigma}_{j-1} \times \Delta\boldsymbol{\sigma}_j}{1 + \sigma_{j-1}^2\Delta\sigma_j^2 - 2\boldsymbol{\sigma}_{j-1} \cdot \Delta\boldsymbol{\sigma}_j} \\ \Delta\boldsymbol{\sigma}_j = \dfrac{\tan(\Delta\varphi_j/4)}{\Delta\varphi_j}\Delta\boldsymbol{\varphi}_j = \left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{\Delta\varphi_j^2}{192} + \cdots\right)\Delta\boldsymbol{\varphi}_j \end{cases} \tag{34}$$

其中 $j=1，2，3，\cdots$. (34)式进行了 Taylor 展开，究竟展开到几阶可通过仿真分析确定. 在解算的过程中，若 $\boldsymbol{\sigma}_j$ 的模大于1，用其影子参数代替它进行计算. 这样，只要给出初始时刻飞行器的姿态 $\boldsymbol{\sigma}_0$，便可以递推出任意时刻飞行器的姿态.

在等效转动矢量 $\Delta\boldsymbol{\varphi}_j$ 已知并且 Taylor 展开式展开到四阶的情况下，四元数算法、修正 Rodrigues 算法(34)式和广义 Rodrigues 算法(32)式的计算量比较如表1所示. 后两种算法是基于协调同步思想提出的，因此都存在切换问题，在计算的过程中，并不是每一步都要进行切换，所以切换时附加的计算量并不是每一步都必需的. 从表1可以看出，四元数算法和修正 Rodrigues 算法(34)式的计算量基本相当，广义 Rodrigues 算法(32)式的计算量最小，大约是前两种算法计算量的一半.

表1 3种算法的计算量比较

计算量	四元数	(34)式	(32)式
乘法(次)	34	36	19
加法(次)	20	22	15
开方(次)	1	0	0
切换附加的计算量	无	乘法6次 加法2次	乘法3次 加法2次

为了进一步验证广义 Rodrigues 算法(32)式的性能，需要进行仿真分析. 为此必须首先给出飞行器的基准姿态运动，设飞行器的姿态运动用2-3-1形式的 Euler 角描述为

$$\varphi(t) = \sin(0.15t), \quad \psi(t) = 8\sin(0.2t),$$
$$\gamma(t) = \sin(0.25t)$$

其中偏航角 ψ 的变化范围超出了±360°，这是为了验证算法处理奇异的能力. 设飞行器飞行时间为1h，3种算法的仿真结果如表2所示.

表 2 3种算法计算效率与计算精度比较[a)]

算法	统计量	1阶	2阶	3阶	4阶	5阶	6阶
四元数算法	t	124.74186	128.21965	137.07413	131.57502	140.86556	154.14574
	$\delta\varphi$	1.01452	0.39557	0.57894	0.57896	0.57896	0.57896
	$\delta\psi$	38.07391	18.91659	0.63197	0.63222	0.63217	0.63217
	$\delta\gamma$	1.56363	0.53916	0.84847	0.84850	0.84850	0.84850
(34)式	t	109.35870	109.23444	117.06938	116.89913	123.637585	121.70678
	$\delta\varphi$	0.68203	0.68203	0.57896	0.57896	0.57896	0.57896
	$\delta\psi$	9.60692	9.60692	0.63222	0.63222	0.63217	0.63217
	$\delta\gamma$	1.01923	1.01923	0.84850	0.84850	0.84850	0.84850
(32)式	t	61.91105	62.01297	66.675848	66.81349	73.45752	73.44246
	$\delta\psi$	1.01452	1.01452	0.57902	0.57902	0.57896	0.57896
	$\delta\psi$	38.07391	38.07391	0.63307	0.63307	0.63217	0.63217
	$\delta\gamma$	1.56363	1.56363	0.84861	0.84861	0.84850	0.84850

a) $\delta\varphi$,$\delta\psi$,$\delta\gamma$分别表示俯仰角、偏航角、滚转角的计算误差,单位为10^{-3}(°);t表示仿真时间,单位为ms.

从表2可以看出，修正Rodrigues算法(34)式的计算时间比四元数算法略小，广义Rodrigues算法(32)式的计算时间最小，大约是四元数算法的一半，这与前面理论分析的结果相符. 表2中姿态计算误差没有考虑陀螺的误差，从表中可以看出Taylor展开式展开到4阶时，计算精度基本达到了极限，再通过增加Taylor展开项不能有效地减小姿态计算误差，此时3种算法的精度基本相当. 综上分析可知，广义Rodrigues算法(32)式与四元数算法或修正Rodrigues算法(34)式相比在不损失计算精度的条件下计算效率大约提高一倍.

6 结论

本文基于协调同步变换思想建立了刚体姿态运动的广义Rodrigues参数姿态描述方法. 它和经典Rodrigues参数或修正Rodrigues参数相比不存在奇异问题，和修正Rodrigues参数及其影子参数相互切换的姿态描述方法相比效率很高，和四元数相比不存在约束条件并且效率高，是一种很好的姿态描述方法. 对于航空航天飞行器的姿态确定，本文提出的姿态描述方法具有高效和无奇异的优越性.

参 考 文 献

1 Shuster MD. A survey of attitude representations. Journal of the Astronautical Sciences, 1993, 41(4): 439—517

2 Phillips WF, Hailey CE, Gebert GA. A review of attitude kinematics for aircraft flight simulation. AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference and Exhibit. Denver, 2000. AIAA—2000—4302

3 周江华，苗育红，王明海. 姿态运动的Rodrigues参数描述. 宇航学报，2004，25(5)：514—519

4 周江华，苗育红，李 宏. 四元数在刚体姿态仿真中的应用研究. 飞行力学，2000，18(4)：28—32

5 Tsiotras P. Stabilization and optimality results for the attitude control problem. Journal of Guidance Control and Dynamics, 1996, 19(4): 772—779

6 Stuelpnagel JC. On the parameterization of the three-dimensional rotation group. SIAM Review, 1964, 6(4): 422—430

7 Signla P, Mortari D, Junkins JL. How to avoid singularity when using Euler angles. In: Coffey SL, Mazzoleni AP, Luu KK, et al. eds. Spaceflight Mechanics 2004. Maui, 2004. San Diego: Univelt, 2005, 1409—1426

8 Schaub H, Junkins JL. Stereographic orientation parameters for attitude dynamics: A generalization of the rodrigues parameters. The Journal of the Astronautical Sciences, 1996, 44(1): 1—19

9 程 杨，杨 涤，崔祜涛. 利用修正罗德里格参数进行飞行器姿态估计. 飞行力学，2002，20(4)：18—21

10 Akella MR. Rigid body attitude tracking without angular velocity feedbakd. In: Kluever CA, Neta B, Hall CD, et al. eds. Spaceflight Mechanics 2000. Clearwater, 2000. San Diego: Univelt, 2000, 3—10

11 胡小平. 自主导航理论与应用. 长沙：国防科技大学出版社，2002，161—170

12 雷 鸣，蔡体菁，李勇健. 捷联惯导系统算法比较研究. 中国惯性技术学报，2002，10(1)：20—24

13 张士邈，刘 放，秦永元. 捷联惯导姿态算法若干问题的研究. 中国惯性技术学报，2002，10(2)：1—6